ЛЕКЦИЯ 3 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1 Основные понятия. Линейные операции над векторами.

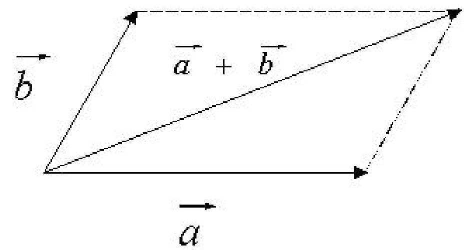
Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление, называется вектором. Вектор служит для геометрического изображения физической векторной величины.

Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия:

1. длины векторов равны
2. векторы коллинеарны, т.е. расположены на одной прямой или параллельных прямых
3. векторы направлены в одну сторону.

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному.

Над векторами определены следующие простейшие операции: сложение, вычитание и умножение вектора на число. Эти операции непосредственно связаны с соответствующими операциями над векторными

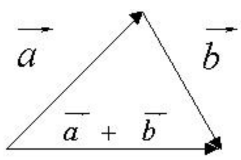


величинами в механике.

Рис.1

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, выходящий из их общего начала, который по величине и направлению изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. (правило параллелограмма) (рис. 1).

Наряду с правилом параллелограмма используется равносильное ему правило треугольника: суммой векторов $\bar{a}$и $\bar{b}$называется вектор, который выходит из начала вектора $\bar{a}$в конец вектора $\bar{b}$при условии, что вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$(рис. 2).



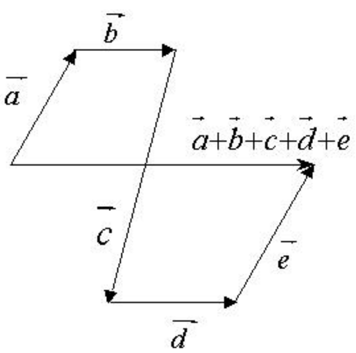


Рис.2 Рис.3

Сложение нескольких векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника.

На рис. 3 представлено построение суммы пяти векторов: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\vec{d}$ и $\bar{e}$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$. Если вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу, то разность $\vec{a}-\vec{b}$ есть вектор, идущий из конца вектора $\bar{b}$ к концу вектора $\bar{a}$ (рис. 4).

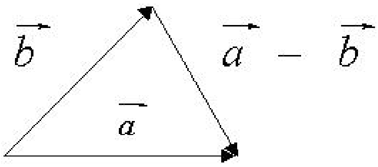


Рис.4

При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ длина вектора умножается на $|\lambda|$, направление сохраняется при $\lambda>0$ и заменяется противоположным при $\lambda<0$.

Операции сложения векторов и умножения векторов на число подчиняются законам:

1. закон переместительности (коммутативный): $\vec{a}+\bar{b}=\bar{b}+\vec{a}$, т.е. сумма не зависит от порядка слагаемых
2. закон сочетательности (ассоциативный): $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, т.е. чтобы прибавить сумму, можно прибавить последовательно каждое слагаемое
3. распределительный (дистрибутивный) закон: $(\vec{a}+\vec{b})\lambda=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Отметим еще, что из определения умножения вектора на число вытекает справедливость равенств:

$$\vec{a}(\lambda_1+\lambda_2)=\vec{a}\lambda_1+\vec{a}\lambda_2$$

$$(\vec{a}\lambda_1)\lambda_2=(\vec{a}\lambda_2)\lambda_1=\vec{a}(\lambda_1\lambda_2)$$

где λ_1 и λ_2 – числа.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось (направленная прямая) $\bar{l}$ называется произведение длины вектора $\bar{a}$ на косинус угла между ними:

$$np_l\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{l})$$

Проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось:

$$np_l(\vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{c})=np_l\bar{a}+np_l\bar{b}+\ldots+np_l\bar{c}$$

Вектор $\vec{d}$, представленный в виде

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\ldots+\gamma\vec{c}$$

где $\overline{a}$, $\overline{b}$,…, $\overline{c}$- различные векторы, α, β,…,γ- числа, называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$,…, $\overline{c}$.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$,…, $\overline{c}$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа α, β,…,γ, не все равные нулю, что имеет место равенство

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \ldots + \gamma\vec{c} = 0$$

Если же таких чисел a*, b,…, g* нет, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$,…, $\overline{c}$ называются линейно независимыми.

Заметим, два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны; три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны (параллельны одной и той же плоскости); четыре вектора (и более) всегда линейно зависимы.

Следовательно, наибольшее число линейно независимых векторов в пространстве равно трем, на плоскости таких векторов два, а на прямой линии – один.

Совокупность линейно независимых векторов, через которые линейно выражается любой вектор пространства, называется базисом этого пространства. Векторы, составляющие базис пространства, называются базисными.

Наибольшее число линейно независимых векторов пространства называется размерностью этого пространства.

В соответствии с этим прямую линию обычно называют одномерным пространством, плоскость является двумерным пространством, а обычное пространство – трехмерным.

Рассмотрим прямоугольную систему координат и зададим произвольную точку *M* трехмерного пространства (рис. 5).

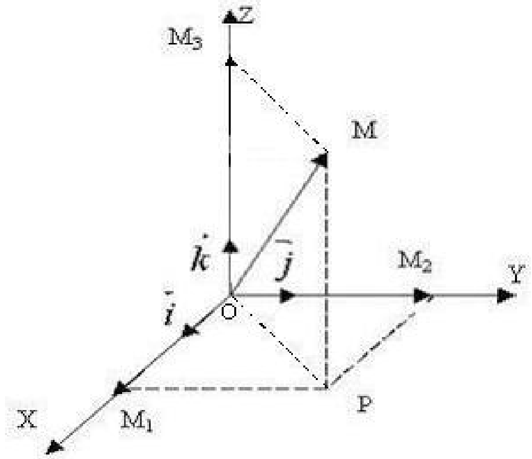


Рис.5

Вектор $\overrightarrow{OM}$ является радиус-вектором точки *M*. Из точки M проведем прямую, параллельную оси OZ, до пересечения в точке *P* с плоскостью XOY и из точки *P* проведем прямую параллельно оси OY до пересечения в точке M_1 с осью OX. Очевидно, будем иметь

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}.$$

Откладывая векторы $\overrightarrow{M_1P}$ и $\overrightarrow{PM}$ от точки 0, заменяя их равными им векторами

$$\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2} \qquad \overrightarrow{PM} = \overline{OM_3}$$

будем иметь

$$\overline{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overline{OM_1} + \overline{OM_3} \tag{1.10}$$

Это равенство показывает, что всякий вектор можно разложить на три слагаемых вектора, лежащих на осях координат. Векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$ называются компонентами или составляющими данного вектора $\overline{OM}$.

От точки 0 – начала координат в положительном направлении каждой оси координат отложим по вектору длины, равной единице. Обозначим три введенных попарно взаимно ортогональных единичных вектора соответственно через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\vec{k}$ и назовем их основными векторами. Вектор $\overrightarrow{OM_1}$, как и вектор $\bar{i}$, расположен на оси абсцисс, а поэтому имеем

$$\overline{OM}_1 = \bar{i}x = x\bar{i}$$

где x есть число, являющееся проекцией вектора $\overline{OM}$ на ось абсцисс. Аналогично имеем

$$\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j} \qquad \overrightarrow{OM_3} = z\bar{k}$$

где y,z – проекции вектора $\overline{OM}$ соответственно на оси ординат и аппликат. Таким образом, равенство (1.10) перепишется в виде

$$\overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{1.11}$$

Значение равенства (1.11) в теории векторов исключительно большое. При помощи этого равенства устанавливается связь между геометрической и алгебраической частями теории векторов. Взаимно дополняя друг друга, они создают то, чем так выгодно отличается векторная алгебра: геометрическая теория дает возможность широко использовать геометрические представления, алгебраическая часть позволяет производить все выкладки.

Вместо полной записи (1.11) часто пользуются сокращенной

$$\overline{OM} = \{x;y;z\} \quad \textit{или} \quad \overrightarrow{OM}\{x;y;z\}$$

Применяя предложение о том, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций этих векторов относительно каждой оси координат, мы заключаем: при сложении векторов одноименные проекции их складываются. Запишем это так, если

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} \qquad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$$

то

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}$$

Из правила сложения векторов вытекает правило вычитания векторов: чтобы вычесть вектор, нужно вычесть его проекции, т.е.

$$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}$$

Аналогично, чтобы умножить вектор на число, нужно умножить все его проекции на это число.

Пример 10. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$.

Решение: вектор $\overline{AB}$ (рис. 6) равен разности между векторами $\overline{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$, т.е. $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$. Так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overline{OB}$ являются радиус-векторами точек *A* и *B* соответственно, а координаты радиус-вектора точки равны соответственно координатам самой точки, то $\overrightarrow{OA}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overline{OB}=\{x_2,y_2,z_2\}$.

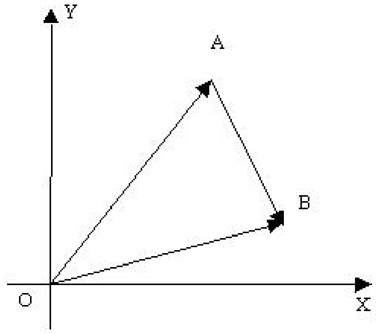


Рис.6

Далее, применяя правило вычитания векторов, заданных своими координатами (проекциями), получим:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$

Отсюда следует правило: для того, чтобы найти координаты вектора, зная координаты его начальной и конечной точек, нужно из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки.

Пример 11. Найти координаты точки *M*, делящей отрезок AB в отношении λ, если $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$.

Решение: очевидно, что $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. Обозначим через *x, y, z* координаты точки *M*, тогда

$$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\},\ \overline{MB}=\{x_2-x;y_2-y;z_2-z\}$$

Далее, применяя правило умножения вектора на число и условия равенства двух векторов, заданных в координатной форме, получим:

$$x-x_1=\lambda\,(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda\,(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda\,(z_2-z)$$

Отсюда следует, что

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{1.12}$$